Частота ошибок при пороговом декодировании сверточного кода

Методика аналитического расчета вероятности ошибки на примере кода со скоростью кодирования ½

Рассмотрим сверточный код с двумя генераторными полиномами

$$\begin{aligned} G_1(x) &= 1 \\ G_2(x) &= 1+x \end{aligned} . \qquad (1)$$

Так как среди этих полиномов имеется единичный, то данный код является систематическим, поэтому входной информационный бит на выходе кодера будет присутствовать явно. Кодируя, например, следующий отрезок из пяти битов

10111,

получим соответствующий отрезок кодовых слов

11 **0**1 **1**1 **1**0 **1**0 01.

Количество кодовых слов получилось на единицу больше количества входных битов, так как у сверточного кода есть **память.** Это качественно отличает сверточные коды от линейных блочных. После окончания входных битов, на вход кодера подается столько нулевых битов, сколько ячеек памяти содержит кодер. Это количество определяется степенью генераторного полинома, имеющего максимальную степень.

Суть порогового декодирования состоит в разделении принимаемого из канала потока битов на поток **информационных** и поток **проверочных.** Далее по принятому потоку информационных битов вычисляется поток проверочных, естественно, по правилу, определяемому генераторными полиномами. Затем попарно сравниваются лишь те проверочные биты, которые содержат информацию о текущем декодируемом бите. Количество несовпадений сравнивается с заранее установленным порогом, при превышении которого текущий бит инвертируется и все зависимые от него проверочные биты, вычисленные декодером, вычисляются заново.

Приведем пример декодирования отрезка безошибочной последовательности

11 01 11 10 10 01.

Для этого отдельно сгруппируем информационные (И) биты и проверочные (П)

И: **1**01110,

П: **11**1001,

а затем вычислим новую проверочную последовательность ($П_д$)

$П_д$: **11**1001.

При декодировании первого бита сравниваем первые две пары проверочных битов (выделены жирным шрифтом), при декодировании второго — вторые и третьи пары проверочных и т. д., — так говорит полином $1+x$.

Для рассматриваемого кода порог разумно взять равным единице. В этом случае для **двоичного симметричного канала с независимыми ошибками** обеспечивается минимум вероятности ошибки после декодирования для малых вероятностей ошибки в канале.

При отсутствии ошибок все пары проверочных битов будут совпадать (ноль несовпадений). Однако, можно ввести такие ошибки, которые также дадут полное совпадение пар.

Пусть, например, был принят следующий отрезок кодовых слов

11 10 10 10 10 01.

Группируя биты

И: **1**11110,

П: **10**0001,

и вычисляя новую проверочную последовательность

$П_д$: **10**0001,

убеждаемся в совпадении. При этом вектор ошибок e равен сумме **по модулю два** двух отрезков, безошибочного и ошибочного

$$e = 11\ 01\ 11\ 10\ 10\ 01 + 11\ 10\ 10\ 10\ 10\ 01 = 00\ 11\ 01\ 00\ 00\ 00$$

Все такие ошибки, которые дают совпадение проверочных битов, не будут обнаружены. Для конкретного кода среди всех векторов необнаруживаемых ошибок можно найти вектор с минимальным количеством ненулевых элементов, то есть с минимальным **весом.** Этот минимум определяет минимальное свободное расстояние кода или просто **свободное расстояние кода,** d_{free}.

Для рассматриваемого кода свободное расстояние равно трем, значит такой код исправит любую однократную ошибку (кратность гарантированного исправления $q_и$ и кодовое расстояние, как известно из теории линейных блочных кодов, связаны неравенством $d_к \geq 2q_и + 1$). Под кратностью ошибки здесь подразумевается количество ошибочных битов в блоке из $nr + 1$ битов, где $r = \max_{1 \leq i \leq n} \deg\left[G_i(x)\right]$ — максимальная из степеней генераторных полиномов, n — число генераторных полиномов.

Проиллюстрируем кратность ошибки. Сделаем, например, следующую ошибку

$$e = 00\ 01\ 01\ 00\ 00\ 00,$$

которая по определенному выше критерию не является однократной (ее кратность равна двум). Тогда принятый отрезок кодовых слов будет равен

$$v = s + e = 11\ 01\ 11\ 10\ 10\ 01 + e = 11\ 00\ 10\ 10\ 10\ 01.$$

Группируя биты

И: 101110,

П: 100001,

и вычисляя новую проверочную последовательность

$П_д$: 111001,

декодируем принятый отрезок как 11111, что отличается от переданных битов 10111, значит, с данной двукратной ошибкой код не справился.

Теперь сделаем такую ошибку

$$e = 00\ 01\ 00\ 10\ 00\ 00,$$

которая критерию однократности удовлетворяет (впритык) и дает

$$v = s + e = 11\ 01\ 11\ 10\ 10\ 01 + e = 11\ 00\ 11\ 00\ 10\ 01.$$

Группируя биты

И: 101010,

П: 101001,

и вычисляя новую проверочную последовательность

$П_д$: 111111,

декодируем принятую последовательность как 10111, что совпадает с 10111, значит, с однократной ошибкой код справился (исправил ее).

Чтобы найти формулу для вероятности ошибки после декодирования, следует рассмотреть все возможные варианты ошибок с учетом памяти кода. Из-за памяти эта задача становится нетривиальной даже для самого простого кода. Однако, разобрав детально вывод формулы, можно получить достаточно точное представление о сверточных кодах, а точнее об эффекте памяти, который проявляется в виде зависимости результата декодирования текущего бита от результатов декодирования предыдущих битов.

Для рассматриваемого кода взаимосвязь канальных битов при декодировании текущего бита **И** можно показать следующей схемой:

$$\begin{matrix} \text{И}\,\textbf{И}\,\text{И} \\ \;\;\text{П}\,\text{П} \end{matrix}\quad \text{(5 канальных битов, 32 варианта).}$$

Исходя из данной схемы, для всех $2^5 = 32$ шаблонов следует определить результат декодирования текущего бита по принципу (**правильно**, **ошибочно**). При этом надо отдать себе отчет в том, что при декодировании текущего предыдущий бит уже декодирован, то есть крайний слева бит И — это уже не канальный бит. По-хорошему, его следует обозначить как $\hat{\text{И}}$, то есть как уже сделанную оценку информационного бита:

$$\begin{matrix} \hat{\text{И}}\,\textbf{И}\,\text{И} \\ \;\;\text{П}\,\text{П} \end{matrix}.$$

Для удобства рассмотрим шаблоны, в которых биты **1/0** обозначают факт **ошибочности/правильности** принятого бита (т. е. как будто бы передаются все нули 0000...). Разделим 32 шаблона ошибок на 4 части:

1. Предыдущий бит $\hat{\text{И}}$ декодирован ошибочно (1), текущий **И** ошибочно (1);
2. Предыдущий бит $\hat{\text{И}}$ декодирован ошибочно (1), текущий **И** правильно (0);
3. Предыдущий бит $\hat{\text{И}}$ декодирован правильно (0), текущий **И** ошибочно (1);
4. Предыдущий бит $\hat{\text{И}}$ декодирован правильно (0), текущий **И** правильно (0).

Соответственно, распишем все варианты канальных ошибок по шаблону **И**ПИП:

1. 1000, 0010, 0001, 1010, 1001, 1110, 1011, 1101;
2. 0111, 0000, 0100, 1100, 0110, 0011, 0101, 1111;
3. 1010, 0101, 1100, 1001, 0110, 1110, 1101, 1111;

4. 0111, 1011, 1000, 0010, 0100, 0001, 0000, 0011.

Например, шаблон 1001 для п.1 означает то, что если предыдущий бит декодирован ошибочно (на это указывает п.1), то при наличии канальных ошибок в текущем информационном **И** и крайнем проверочном П бите (на это указывает шаблон), текущий бит **И** будет декодирован ошибочно. В данном контексте это означает то, что бит **И** не будет инвертирован декодером

$$\begin{matrix} 1\mathbf{1}0 \\ 01 \\ 01 \end{matrix}.$$

В последней строке находятся вычисленные проверочные биты 0=1+**1**, 1=**1**+0. Пары проверочных битов полностью совпали, поэтому декодер не тронет информационный бит, в котором по условию содержится ошибка, что и даст ошибочное декодирование этого бита. Рассмотренная ситуация соответствует двум подряд идущим ошибкам декодирования.

Шаблон **0**001 для п.1 приведет инвертированию информационного бита **0,** в котором по условию ошибки нет.

Для дальнейшего продвижения следует отвлечься от шаблонов ошибок и сделать следующие рассуждения весьма общего характера.

При декодировании (не важно каким методом) могут, шаг за шагом, возникать два противоположных результата: правильное декодирование *П* и ошибочное *О*. Чем больше будет принято битов, тем точнее можно оценить вероятность ошибочного декодирования, которая есть предельная величина, предполагающая бесконечное число принятых битов.

Как следствие, в процессе декодирования возникают четыре варианта переходов

$$\begin{matrix} П \rightarrow П \\ П \rightarrow О \\ О \rightarrow П \\ О \rightarrow О \end{matrix}.$$

У каждого перехода есть своя вероятность **(переходная вероятность)**

$$\begin{matrix} P_{П/П} \\ P_{П/О} \\ P_{О/П} \\ P_{О/О} \end{matrix}.$$

Итоговую вероятность ошибки, которую требуется отыскать, обозначим как $P_О$, и приведем граф переходов (рис. 1).

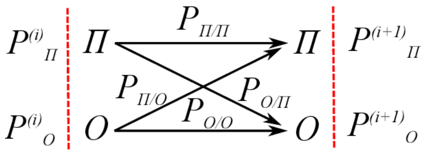


Рисунок 1: Граф переходов для некоторой системы с двумя состояниями П и О

Индекс i на рис. 1 соответствует текущему моменту времени.

После бесконечного числа переходов безусловные вероятности для индексов i и i+1 сравняются:

$$\lim_{i\to\infty} P_{П}^{(i)} = P_{П}, \quad \lim_{i\to\infty} P_{О}^{(i)} = P_{О},$$

поэтому, фактически, временной индекс i за ненадобностью можно убрать и записать систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} P_{П} &= P_{П} P_{П/П} + P_{О} P_{П/О} \\ P_{О} &= P_{П} P_{О/П} + P_{О} P_{О/О} \end{aligned}.$$

Учитывая условие нормировки, получим формулу для вероятности ошибочного декодирования

$$P_{О} = \frac{P_{О/П}}{P_{О/П} + 1 - P_{О/О}}, \tag{2}$$

откуда следует, что фактически требуется найти зависимости двух условных вероятностей от вероятности ошибки в канале.

Рассмотрим канал с независимыми битовыми ошибками, возникающими с вероятностью p.

Сперва найдем зависимость $P_{О/О}(p)$.

Событие *О*/*О* означает событие, состоящее в том, что **будущий** бит будет декодирован ошибочно, при условии, что **текущий бит** уже декодирован ошибочно. Условие указывается после знака косой черты (/).

Для отыскания вероятности рассмотрим две схемы

$$\begin{matrix} О\,\boldsymbol{О}\,\mathrm{x} \\ \ \ \mathrm{x}\ \mathrm{x} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} П\,\boldsymbol{О}\,\mathrm{x} \\ \ \ \mathrm{x}\ \mathrm{x} \end{matrix},$$

в совокупности обозначающие случай ошибочного декодирования текущего бита ***О*.** При этом предыдущий бит может быть декодирован либо ошибочно *О*, либо правильно *П*. Этим двум схемам соответствуют определенные выше пп. 1 и 3, соответственно.

Обратим особое внимание, что текущий ошибочный бит ***О*** по отношению к вероятности $P_{О/\boldsymbol{О}}(p)$ стоит в условии, то есть после знака косой черты!

Объединяя пп. 1 и 3, получим 12 **разных** шаблонов **канальных** ошибок

$$1000,\ 0010,\ 0001,\ 1010,\ 1001,\ 1110,\ 1011,\ 1101,\ 0101,\ 1100,\ 0110,\ 1111,$$

приводящих к ошибочному декодированию текущего бита. Данную ситуацию можно интерпретировать так: наблюдая сам процесс декодирования и принимая во внимание (фильтруя) лишь те случаи, при которых текущий бит **декодируется** ошибочно, допускаются лишь 12 шаблонов ошибок, поэтому сумма всех 12 вероятностей равна единице.

Например, вероятность появления шаблона 1000 — она является условной вероятностью — равна (использовалась формула Бернулли для канала с независимыми битовыми ошибками)

$$P_{1000/\boldsymbol{O}}=\frac{p(1-p)^3}{3p(1-p)^3+5p^2(1-p)^2+3p^3(1-p)+p^4}\quad (3+5+3+1=12).$$

При малых p эта вероятность стремится к 1/3.

Теперь, для реализации перехода из $\boldsymbol{O}$ в O, нарисуем следующую схему

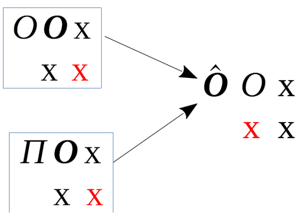
$$\begin{matrix}\hat{\boldsymbol{O}} & O & \mathrm{x}\\ & \mathrm{x} & \mathrm{x}\end{matrix}.$$

Знак "крышки" над буквой $\boldsymbol{O}$ означает то, что этот бит уже декодирован, и при том ошибочно. Осталось определить вероятность того, что будущий бит будет декодирован ошибочно (он обозначен буквой O).

Сочетанию O/O соответствуют шаблоны из п.1 (см. выше):

$$1000,\ 0010,\ 0001,\ 1010,\ 1001,\ 1110,\ 1011,\ 1101.$$

В данном контексте первый бит в перечисленных шаблонах ошибок соответствует позиции будущего бита (см. рис. слева).



По приведенным восьми шаблонам видно, что возможны лишь следующие сочетания первых двух битов

$$10,\ 00,\ 11.$$

В ранее рассмотренной группе из 12 шаблонов эти биты стоят **на последнем месте,** поэтому вероятность того, что появятся биты 10, в итоге равна

$$P_{10/\hat{\boldsymbol{O}}}=P_{0010/\boldsymbol{O}}+P_{1010/\boldsymbol{O}}+P_{1110/\boldsymbol{O}}+P_{0110/\boldsymbol{O}}=\frac{p(1-p)^3+2p^2(1-p)^2+p^3(1-p)}{3p(1-p)^3+5p^2(1-p)^2+3p^3(1-p)+p^4}.$$

Аналогично можно найти вероятности $P_{00/\hat{\boldsymbol{O}}}$ и $P_{11/\hat{\boldsymbol{O}}}$

$$P_{00/\hat{\boldsymbol{O}}}=\frac{p(1-p)^3+p^2(1-p)^2}{3p(1-p)^3+5p^2(1-p)^2+3p^3(1-p)+p^4},$$

$$P_{11/\hat{o}}=\frac{p^3(1-p)+p^4}{3p(1-p)^3+5p^2(1-p)^2+3p^3(1-p)+p^4}\ .$$

Два последних канальных бита для группы *O*/*O* учитываются непосредственно (безусловно), например, $P_{00}=(1-p)^2$, $P_{10}=P_{01}=p(1-p)$, $P_{11}=p^2$.

В итоге,

$$P_{O/O}(p)=P_{10/\hat{o}}(P_{00}+P_{01}+P_{10}+P_{11})+P_{00/\hat{o}}(P_{01}+P_{10})+P_{11/\hat{o}}(P_{01}+P_{10})\ .$$

Расчеты дают

$$P_{O/O}(p)=\frac{p+1}{2p^2-4p+3}-2p^2\approx 1/3+7p/9-32p^2/27+\ldots\ .$$

График зависимости $P_{O/O}(p)$ показан на рис. 2.

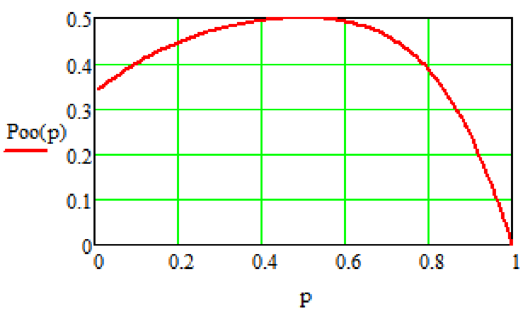


Рисунок 2

Любопытна точка (1, 0). Смысл ее таков, что если в канале постоянно происходят ошибки ($p=1$), то после ошибочного декодирования будет правильное декодирование.

Для расчета вероятности $P_{O/\Pi}(p)$ требуется объединить шаблоны из пп. 2 и 4:

0111, 0000, 0100, 1100, 0110, 0011, 0101, 1111, 1011, 1000, 0010, 0001.

Для реализации перехода из ***П*** в *O*, нарисуем следующую схему

$$\begin{array}{ccc} \hat{\boldsymbol{\Pi}} & O & \text{x} \\ & \text{x} & \text{x} \end{array}.$$

Сочетанию *O*/*П* соответствует п.3

1010, 0101, 1100, 1001, 0110, 1110, 1101, 1111.

Поэтому

$$P_{10/\hat{\pi}}=\frac{p(1-p)^3+p^2(1-p)^2}{(1-p)^4+4p(1-p)^3+4p^2(1-p)^2+2p^3(1-p)+p^4}\ ,$$

$$P_{01/\hat{\pi}}=\frac{p(1-p)^3+p^2(1-p)^2}{(1-p)^4+4p(1-p)^3+4p^2(1-p)^2+2p^3(1-p)+p^4}\ ,$$

$$P_{11/\hat{n}}=\frac{2p^3(1-p)+p^2(1-p)^2+p^4}{(1-p)^4+4p(1-p)^3+4p^2(1-p)^2+2p^3(1-p)+p^4}.$$

Тогда

$$P_{O/\pi}(p)=P_{10/\hat{\pi}}(P_{10}+P_{01})+P_{01/\hat{\pi}}(P_{01}+P_{10})+P_{11/\hat{\pi}}(P_{00}+P_{10}+P_{01}+P_{11}),$$

$$P_{O/\pi}(p)=\frac{-p^2(4p^3-12p^2+12p-5)}{2p^3-2p^2+1}.$$

График зависимости $P_{O/\pi}(p)$ показан на рис. 3.

Анализируя одновременно рис. 2 и 3, можно убедиться в том, что если в канале постоянно происходят ошибки (p = 1), то результат декодирования чередуется по принципу "правильно", "ошибочно" и т. д., в следствие чего вероятность ошибки после декодирования равна будет ½.

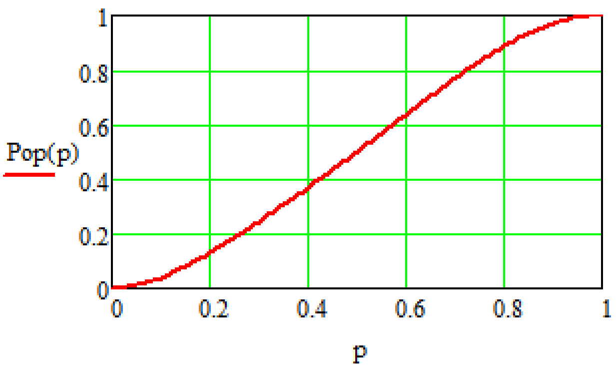


Рисунок 3

Наконец, используя (2), получим окончательный результат

$$P_O(p)=\frac{-p^2(2p^2-4p+3)(4p^3-12p^2+12p-5)}{16p^6-52p^5+72p^4-50p^3+19p^2-5p+2}.$$

Практический интерес представляет приближение для малых p

$$P_O(p)\approx\frac{15}{2}p^2-\frac{37}{4}p^3.$$

График зависимости $P_O(p)$ в логарифмическом масштабе показан на рис. 4.

Например, если вероятность ошибки в канале равна 10^{-3}, то откладывая по оси p число −3, можно графически оценить вероятность ошибки после порогового декодирования как 10^{-5}. Более точное значение равно $7{,}5\cdot10^{-6}$. Данная вероятность говорит о том, что если в канале искажается в среднем 1 бит из 1000 переданных, то после декодирования ошибочным будет в среднем 1 бит на 133500 принятых битов, то есть частота ошибок уменьшится примерно в 130 раз.

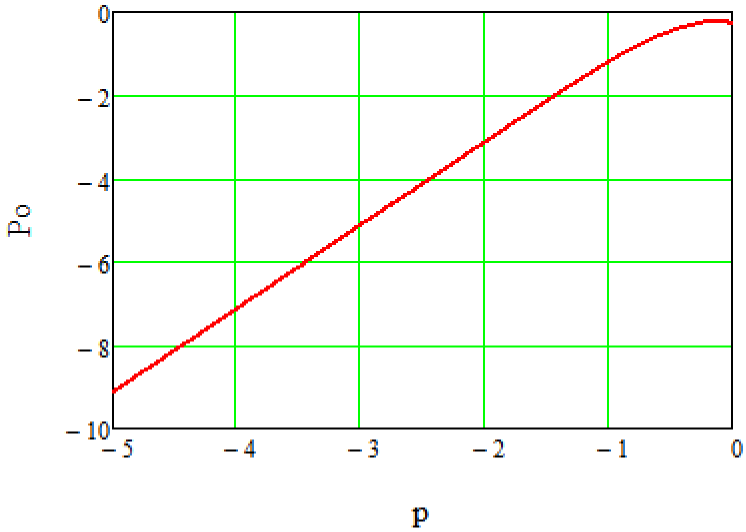


Рисунок 4