

Министерство науки и высшего образования РФ

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

А. В. Новиков

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ СИГНАЛА В КОДИРОВКЕ MLT-3

Учебное наглядное пособие для магистрантов,
обучающихся по направлениям подготовки "Радиотехника" и
"Инфокоммуникационные технологии и системы связи"

Томск

2020

УДК 621.391

ББК 32.88-01

Рецензент:

Акулиничев Ю.П., профессор кафедры радиотехнических систем ТУСУР,
докт. техн. наук

Новиков, Анатолий Викторович

Корреляционная функция и спектральная плотность мощности сигнала в кодировке MLT-3. Учебное наглядное пособие. Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2020. – 17 с.

Настоящее учебное наглядное пособие составлено с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО).

В пособии в замкнутой форме синтезировано выражение автокорреляционной функции дискретной случайной последовательности, соответствующей нелинейному коду MLT-3 (Multi-Level Transmit). Описана механика процесса синтеза. Дополнительно найдено выражение для соответствующей спектральной плотности мощности (также в замкнутой форме).

Процесс синтеза — сложный и важный процесс, показывающий суть научно-технического творчества, поэтому данное пособие будет полезно не только магистрантам, но и аспирантам, инженерам и научным работникам, исследующим проблемы передачи цифровой информации.

Одобрено на заседании каф. радиотехнических систем, протокол № 07 от 05 марта 2020 г.

УДК 621.391

ББК 32.88-01

© Новиков А. В., 2020

© Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2020

Оглавление

Введение.....	4
Логика кодирования MLT-3.....	5
Формирование кодированного видеосигнала и его спектральная плотность мощности.....	6
Автокорреляционная функция кода MLT-3.....	8
Свертка выражения для автокорреляционной функции.....	13
Выражение для спектральной плотности мощности кода MLT-3.....	14
Заключение.....	16
Приложение А. Расчет спектральной плотности мощности кода MLT-3 по автокорреляционной функции.....	17

Введение

Попытка в замкнутой форме найти выражение автокорреляционной функции дискретной случайной последовательности, соответствующей нелинейному коду MLT-3, а также выражение спектральной плотности мощности, дала отрицательный результат. В связи с чем возникла идея синтезировать эти выражения и подробно описать этот удивительный процесс, преследуя прежде всего методическую цель: небольшим примером процесса синтеза привить интерес к научно-техническому творчеству.

Код MLT-3 является нелинейным трехуровневым кодом и, по большей части, используется в очень популярной технологии Fast Ethernet 100Base-TX для передачи информации по витой паре — медному кабелю. Код MLT-3 снижает уровень:

- междуканальных помех (в случае многоканальной системы);
- межсимвольной интерференции (при передаче по каналу с ограниченной полосой частот).

Код MLT-3 устроен таким образом, что верхняя частота в спектре кодированного сигнала, в целом, в 4 раза ниже верхней частоты некодированного. Так как с уменьшением частоты сигнала способность проводника излучать электромагнитные волны падает, то такая кодировка, фактически, снижает уровень излучения от кабеля, т. е. спектральную плотность помехи (Crosstalk level).

Снижение ширины спектра кодированного сигнала позволяет передавать его по каналу с меньшей полосой пропускания без снижения производительности системы, или по каналу с той же полосой, но с меньшим уровнем межсимвольной интерференции (Inter-Symbol Interference) и меньшим затуханием.

Уровень межсимвольной интерференции и междуканальной помехи в приемнике можно охарактеризовать суммарной спектральной плотностью эквивалентной помехи типа белый шум (вместе с тепловым шумом приемника), поэтому, в итоге, снижение уровня помехи приведет к снижению вероятности ошибки в приемнике — ключевому показателю (помимо скорости передачи) качества работы цифровых систем передачи информации.

Логика кодирования MLT-3

Кодирующее устройство (кодер) MLT-3 преобразует последовательность

двоичных символов U_n в последовательность троичных R_n . Здесь

$n \in \mathbb{Z}$, т.е. индекс n пробегает множество целых чисел \mathbb{Z} . Если на вход кодера U_n поступает бит 0, то уровень R_n на

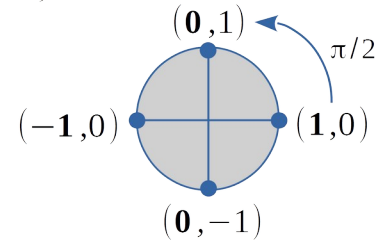


$$C_n = C_{n-1} \exp\left(\frac{\pi j}{2} U_n\right)$$

$$R_n = \Re(C_n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$C_{-\infty} = 1 \quad j = \sqrt{-1}$$

Рис. 1 Математика кода MLT-3



выходе кодера остается без изменений. Если на вход кодера поступает бит 1, то выходной уровень изменяется на следующий. Следующему уровню соответствует поворот вспомогательного вектора C_n на $+90$ градусов,

рис. 1, причем в качестве выходного уровня берется всего лишь одна координата вектора (выделена жирным шрифтом); здесь это вещественная часть¹

$\Re[\cdot]$ комплексного числа C_n . Таким образом, последовательность, допустим, из всех единиц $(1,1,1,\dots)$ кодируется периодически повторяющейся последовательностью $(1,0,-1,0)$, которую логично

интерполировать гармоническим

колебанием с частотой, в 4 раза меньшей

символьной частоты $1/T$.

При этом подача

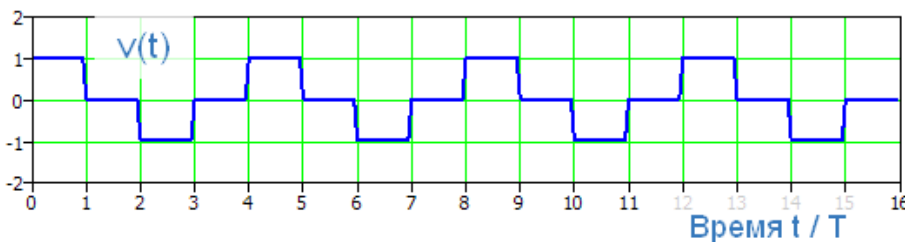


Рис. 2 Кодированный MLT-3 видеосигнал, переносящий биты «все единицы»

на вход кодирующего устройства нулей лишь замедлит процесс на выходе. Такое наблюдение показывает, что частота $1/(4T)$ определяет некую фундаментальную гармонику, левее которой концентрируется основная мощность соответствующего видеосигнала $v(t)$.

1 Взятие вещественной части приводит к тому, что код становится нелинейным. Это усложняет процесс синтеза выражения автокорреляционной функции такого кода.

Заметим, что поворот вспомогательного вектора на 90 градусов можно интерпретировать как дифференциальную фазовую манипуляцию ФМн-4 (D-QPSK) соответствующего радиосигнала, в связи с чем в процессе приема и декодирования кода MLT-3 возможно появление парных ошибок.

Формирование кодированного видеосигнала и его спектральная плотность мощности

Видеосигнал $v(t)$, подаваемый непосредственно в среду передачи (в линию связи), является откликом некоторого линейного фильтра на код — трехзначную последовательность R_n

$$v(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n g(t - nT), \quad (1)$$

где $g(t)$ — импульсная характеристика (ИХ) фильтра, который называется формирующим. Этот фильтр определяет спектр формируемого сигнала, а также позволяет проконтролировать (задать) уровень возможного влияния нескольких соседних импульсов друг на друга — межсимвольную интерференцию. Формула (1) описывает свертку последовательности R_n с сигналом $g(t)$ в точном соответствии с теорией линейной фильтрации. Вероятно, вам более знакома интегральная форма записи свертки

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) g(t - \tau) d\tau,$$

которая, однако, для дискретного входного сигнала

$$r(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n \delta(\tau - nT) \quad (\delta(t) \text{ — дельта-функция})$$

переходит в (1).

Видеосигналам на рис. 3 и рис. 4 соответствует фильтр с прямоугольной ИХ $g(t)$, а различие в спектрах этих сигналов, рис. 5, вызвано лишь кодом. Здесь сигналы выровнены по средней мощности, равной 0,5, что косвенно подтверждается равенством их спектральных плотностей² на нулевой частоте, рис. 5. Форма спектральной плотности мощности некодированного сигнала совпадает с формой спектральной плотности одиночного импульса $g(t)$, которая равна квадрату

² Если спектр отображен в децибелах, то допускается говорить «спектральная плотность», не конкретизируя по мощности или амплитуде

кардинального синуса³. Заметим, что некодированному сигналу при этом соответствует последовательность некоррелированных равновероятных битов, отображенных сигнальными уровнями $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ и $-1/\sqrt{2} \approx -0,707$. Некоррелированная последовательность битов является эталонной, в том смысле, что такие биты не приводят к изменению формы спектральной плотности мощности модулированного ими сигнала $v(t)$. Свойство сохранять форму спектра вызвано отсутствием корреляции битов, т. е. игольчатой автокорреляционной функцией, АКФ.

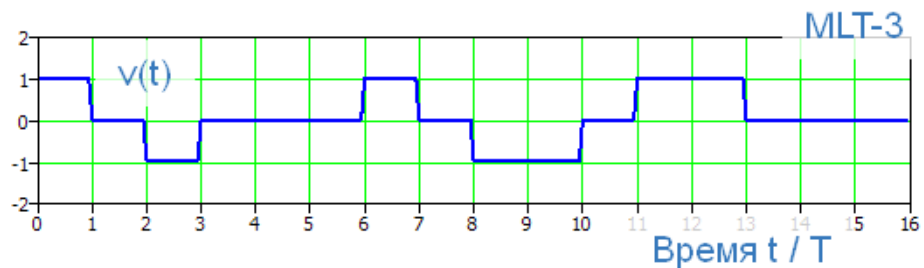


Рис. 3 Кодированный MLT-3 видеосигнал, переносящий биты 1111001110110100

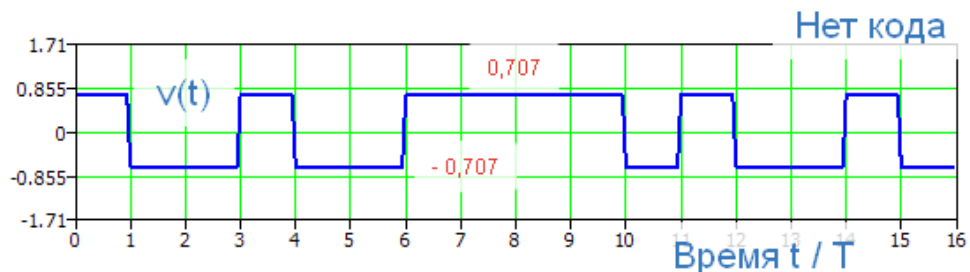


Рис. 4 Биполярный видеосигнал, переносящий биты 1001001111010010

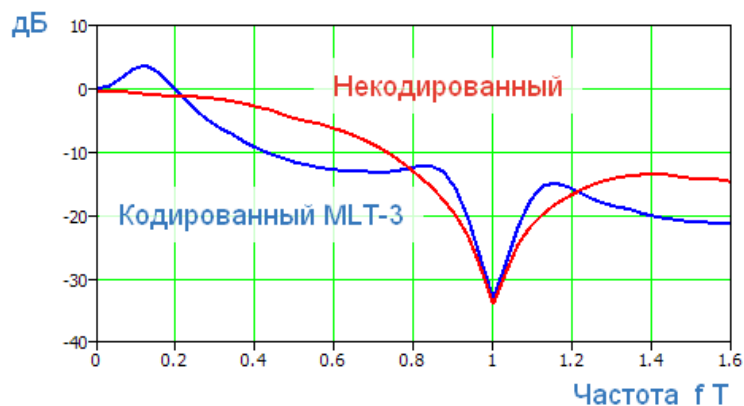


Рис. 5 Спектральные плотности информационных видеосигналов. Кривые получены путем статистического моделирования на ЭВМ.

3 Обозначение $\text{sinc}(x)$ для функции $\sin(x)/x$ было введено Филипом Вудвордом — английским математиком, специалистом в области радиолокации и часовых дел. Функция неопределенности также была введена Вудвордом.

Известно⁴, что в общем случае спектральная плотность мощности сигнала с линейной модуляцией (1) равна произведению двух спектральных плотностей

$$\Phi_{vv}(f) = \Phi_{gg}(f) \Phi_{RR}(f) , \quad (2)$$

где $\Phi_{gg}(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2$ — спектральная плотность мощности одиночного импульса $g(t)$,

$$\Phi_{RR}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_{RR}(n) e^{-2\pi jfnT} \quad \text{— спектральная плотность мощности}$$

последовательности R_n , являющаяся дискретным преобразованием Фурье ее АКФ $\varphi_{RR}(n) = M[R_i R_{i+n}]$. Здесь $M[\]$ — оператор математического ожидания.

Если АКФ игольчатая, т. е. $\varphi_{RR}(n) = \sigma^2 \delta_n$, где δ_n — δ - последовательность⁵, то $\Phi_{RR}(f) = \sigma^2 = \text{const}$. Величина σ^2 пропорциональна средней мощности последовательности R_n .

Отсутствие корреляции в некоторой стационарной последовательности B_n математически обозначается так

$$\varphi_{BB}(n) = M[B_{i+n} B_i] = \overline{B_{i+n} B_i} = 0 , \quad \forall n \neq 0 .$$

Заметим, что значение АКФ в нуле есть средний квадрат некоторой случайной величины

$$\varphi_{BB}(0) = M[B_n B_n] = \overline{B_n^2} ,$$

который пропорционален средней мощности соответствующего дискретного случайного процесса.

Автокорреляционная функция кода MLT-3

Определим для начала средний квадрат последовательности равновероятных битов, представленных биполярным кодом $(-1, +1)$

$$\varphi_{BB}(0) = \overline{B_n^2} = (-1)^2 1/2 + (+1)^2 1/2 = 1 .$$

4 Прокис Джон, Цифровая связь, глава 4.4

5 Единичный импульс, дискретный импульс

Далее определим средний квадрат последовательности на выходе кодера MLT-3. Для этого вычислим вероятности значений $(-1, 0, +1)$ троичного символа R_n . Выясним какие причины влекут появление уровня 0 на выходе кодера. Во-первых, это переход из 1 в 0 или из -1 в 0 при поступлении на вход бита 1. Во-вторых, это пребывание в предыдущем состоянии 0 при поступлении на вход бита 0. Данную причинно-следственную связь оформим математически

$$p(0) = 1/2 p(+1) + 1/2 p(-1) + 1/2 p(0) ,$$

где $p(x)$ — вероятность значения x на выходе кодера. Вероятности по $1/2$ означают вероятности входных битов. Рассуждая аналогично, запишем уравнения для выходных уровней +1 и -1

$$p(+1) = 1/2 p(0) + 1/2 p(+1) ,$$

$$p(-1) = 1/2 p(0) + 1/2 p(-1) .$$

В этих двух уравнениях после $p(0)$ идет коэффициент $1/2$, потому что переход в +1 при поступлении на вход 1 возможен лишь из нуля, следующего за -1. Вспомните кольцо уровней $(+1, 0, -1, 0)$. Решая систему из трех уравнений, находим ответ

$$p(+1) = p(-1) = 1/4 , \quad p(0) = 1/2 .$$

Отсюда средний квадрат

$$\varphi_{RR}(0) = \overline{R_n^2} = (-1)^2 1/4 + (0)^2 1/2 + (+1)^2 1/4 = 1/2 .$$

Переводя это на язык мощностей, констатируем, что средняя мощность кодированных символов R_n уменьшилась в 2 раза относительно некодированных B_n . Однако кодированные символы в 2 раза ближе некодированным. Если два соответствующих процесса выровнять по средней мощности, то кодированные символы будут в $\sqrt{2}$ раз ближе некодированным, что при той же спектральной плотности эквивалентной помехи несколько повысит вероятность ошибки при детектировании кодированных импульсов. Дополнительной платой за использование кода MLT-3 является увеличение требуемого динамического диапазона приемника (передатчика) на 3 дБ (уровни $\sqrt{2}$, 0, $-\sqrt{2}$ против 1, -1).

Рассуждая для произвольных вероятностей $p_0 + p_1 = 1$ битов на входе кодера MLT-3, составим систему из четырех уравнений

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_0 - 1 & 0 \\ 0 & p_0 - 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_1 & p_0 - 1 \\ p_0 - 1 & p_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0_1) \\ p(0_2) \\ p(+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где индексами обозначено различие выходных нулей $(+1, 0_1, -1, 0_2)$. Решение данной системы дает интересный результат (здесь ранг матрицы равен 3, при $p_1 \neq 0$)

$$p(+1) = p(-1) = 1/4, \quad p(0) = p(0_1) + p(0_2) = 1/2.$$

Статистическое моделирование процесса кодирования MLT-3 позволяет убедиться в этом.

Значение АКФ в нуле мы уже определили, это $\varphi_{RR}(0) = \overline{R_n^2} = 1/2$. Определим значение АКФ в другие моменты времени. Напомним, что АКФ является четной, поэтому достаточно лишь вычислить все $\varphi_{RR}(n) = \overline{R_i R_{i+n}}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Рассмотрим подробно случай $n = 1$, табл. 1.

Табл. 1 Возможные состояния кодера MLT-3 для расчета корреляции соседних символов

U_i	U_{i+1}	R_{i-1}	R_i	R_{i+1}	p
(1,1,0,0)	0	(+1, -1, 0 ₁ , 0 ₂)	0	0	1/4
(1,0)	1	(-1, 0 ₂)	0 ₂	+1	1/8
(1,0)	1	(0 ₂ , +1)	+1	0 ₁	1/8
(1,0)	1	(0 ₁ , -1)	-1	0 ₂	1/8
(1,0)	1	(+1, 0 ₁)	0 ₁	-1	1/8
(1,0)	0	(0 ₂ , +1)	+1	+1	1/8
(1,0)	0	(0 ₁ , -1)	-1	-1	1/8

Здесь в двух столбцах (выделены серым), перебираются все возможные сочетания $R_i R_{i+1}$, после чего логически вычисляются возможные значения в первых трех столбцах. Затем ситуация "переворачивается", т. е. считается, что первые три столбца таблицы являются причиной, а следующие два — следствием, а вероятность следствия p вычисляется через вероятность соответствующей причины. Допустим

$$p(00) = p_1 p_0 p(+1) + p_1 p_0 p(-1) + p_0 p_0 p(0_1) + p_0 p_0 p(0_2) = \\ = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 = 1/4$$

$$p(+1+1) = p_1 p_0 p(0_2) + p_0 p_0 p(+1) = \\ = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 = 1/8 \quad \dots$$

Суммируя, получим

$$\varphi_{RR}(1) = \overline{R_i R_{i+1}} = (+1) \cdot (+1) \cdot 1/8 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1/8 = 1/4$$

Мы просуммировали два слагаемых, т. к. остальные равны нулю. Этот факт можно использовать для ускорения анализа, т. е. анализировать лишь те произведения, которые отличны от нуля, чем мы далее и воспользуемся. Вычислим $\varphi_{RR}(2) = \overline{R_i R_{i+2}}$. Для этого по минимуму заполним табл. 2.

Табл. 2 Возможные состояния кодера MLT-3 для расчета корреляции двух символов, разделенных одним соседом

R_{i-1}	R_i	R_{i+1}	R_{i+2}	p
$(-1, 0_1)$	-1	0_2	+1	1/16
$(+1, 0_2)$	+1	0_1	-1	1/16
$(+1, 0_2)$	+1	+1	+1	1/16
$(-1, 0_1)$	-1	-1	-1	1/16

Вычислим, например, вероятность $p(-1+1)$. Если мы зафиксировали $R_i R_{i+2} = -1+1$, то согласно логике кодирования автоматически $R_{i+1} = 0_2$, т. е. столбец R_{i+1} становится неслучайным и становится ненужным (зависимым). Тогда предыдущим состоянием кодера R_{i-1} могут быть два значения: -1 или 0_1 , при этом если $R_{i-1} = -1$, то на входе кодера будет $U_i = 0$, а если $R_{i-1} = 0_1$, то $U_i = 1$. Значения U_{i+1}, U_{i+2} обязаны быть равны по единице, потому что кодер меняет состояние как $-1, 0_2, +1$. Держа в уме эту логику, вычисляем искомую вероятность

$$p(R_i R_{i+2} = -1+1) = \\ = p(-1) p_0 p_1 p_1 + p(0_1) p_1 p_1 = \\ = 1/4 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 + 1/4 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/16$$

В итоге все значимые состояния оказались равновероятными, что дает $\varphi_{RR}(2) = 0$.

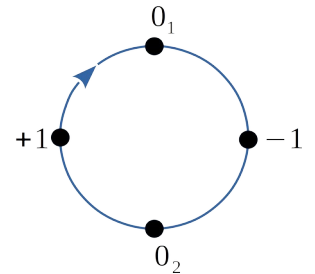
Заполним таблицу для вычисления $\varphi_{RR}(3)$.

Таблица 3 Возможные состояния кодера MLT-3 для расчета корреляции двух символов, разделенных двумя рядом стоящими соседями

R_i	R_{i+1}	R_{i+2}	R_{i+3}	$R_i R_{i+3}$	p
-1	-1	0_2	+1	-1	1/32
-1	0_2	0_2	+1	-1	1/32
-1	0_2	+1	+1	-1	1/32
+1	+1	0_1	-1	-1	1/32
+1	0_1	0_1	-1	-1	1/32
+1	0_1	-1	-1	-1	1/32
-1	-1	-1	-1	+1	1/32
+1	+1	+1	+1	+1	1/32

Зафиксируем мысленно цикл состояний кодера (кольцо на рисунке). Важны лишь ненулевые произведения

$R_i R_{i+3}$, поэтому вся соль заключается в отыскании логики всех возможных переходов из ненулевого состояния в ненулевое. Для кода MLT-3 таких переходов четыре:



$$\{-1 \rightarrow -1, -1 \rightarrow +1, +1 \rightarrow -1, +1 \rightarrow +1\}.$$

Для некоторых переходов существует не один, а несколько путей. Допустим, из -1 в $+1$ при $n=3$ можно перейти тремя способами. Здесь n – число тиков (шагов). Оно определяется аргументом АКФ $\varphi_{RR}(n)$. При трех тиках допускается один раз задержаться в -1 или в 0_2 или в $+1$, т. к. если нигде не задерживаться, то осуществится переход из -1 в 0_1 . Задержка в некотором состоянии соответствует поступлению 0 на вход кодера, а шаг по кольцу — 1. Итого, $\varphi_{RR}(3) = -1/8$.

Осознав логику движения по кольцу состояний, случай $\varphi_{RR}(n=4)$ рассмотрим "в темпе вальса", обобщив логику на любое n . Для этого число пройденных дуг кольца обозначим как r , причем всегда $0 \leq r \leq n$. Если дуга пройдена, то обозначим это как 1, если нет, то как 0. Тогда, допустим, при $n=4$ и $r=2$ можно выписать следующие варианты переходов, хоть из -1 в $+1$, хоть наоборот:

0000 — здесь ни одной дуги не было пройдено, $r=0$.

1100 , 1010 , 1001 , 0110 , 0101 , 0011 — здесь пройдено две дуги, $r=2$

1111 — здесь пройдено 4 дуги, $r=4$ (кольцо целиком).

Можно отметить, что переходам из ненулевого состояния в ненулевое всегда соответствует четное число r , т. к. ненулевые состояния разделены двумя дугами-четвертинками.

Известно, что число двоичных кодовых слов длиной n с количеством единиц r определяется числом сочетаний из n по r

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} .$$

Например

$$C_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1 , \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6 .$$

Замечая, что можно переходить как из -1 , так и из $+1$ (число вариантов удваивается), а также нормируя АКФ к единице (в центре), получим следующий результат

$$\varphi_{RR}(n) = \frac{1}{2^n} \sum_{r \geq 0} C_n^{2r} (-1)^r , \quad n \geq 0 . \quad (3)$$

Заметим, что хотя количество слагаемых и конечно (порядка $n/2$), найденное выражение неудобно с точки зрения линейного роста количества операций в зависимости от n , что, в итоге, при последовательном расчете всех $n=0 \dots N$ значений дает общее число операций порядка $N^2/2$. Поэтому встает задача сворачивания суммы (3), что дополнительно упростит вычисление соответствующей спектральной плотности мощности.

Свертка выражения для автокорреляционной функции

Используя свойство мнимой единицы $i^4=1$ и бином Ньютона $(1+i)^n$, свернем выражение (3)

$$\varphi_{RR}(n) = 2^{-\frac{|n|}{2}} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) . \quad (4)$$

Это так, потому что с одной стороны, группируя четные и нечетные индексы, имеем равенство

$$(1+i)^n = \sum_{k \geq 0} C_n^k i^k = \sum_{k \geq 0} C_n^{2k} (-1)^k + i \sum_{k \geq 0} C_n^{(2k+1)} (-1)^k ,$$

а с другой — имеем прямое следствие формулы Муавра

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{\frac{\pi i n}{4}} ,$$

поэтому беря вещественные части от обоих выражений, получаем искомый результат. Отрезок АКФ показан на рис. 6.

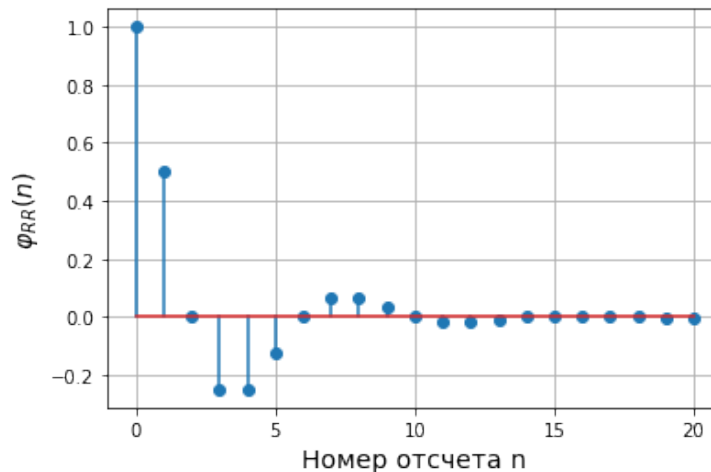


Рис. 6 Отрезок автокорреляционной функции кода MLT-3

Видно, что коэффициент корреляции соседних отсчетов равен 0,5, а отсчеты, взятые через один, — некоррелированы. Так как АКФ (4) промодулирована косинусом, то в соответствующей спектральной плотности мощности должна быть резонансная область в окрестности частоты $1/8$, в чем мы далее и убедимся.

Выражение для спектральной плотности мощности кода MLT-3

Используя формулу Эйлера и формулу суммы геометрической прогрессии⁶, вычислим спектральную плотность мощности кода MLT-3

$$\Phi_{RR}(fT) = \frac{3 - 2 \cos(2\pi fT)}{[2 \cos(2\pi fT) - 2 \sin(2\pi fT) - 3][2 \cos(2\pi fT) + 2 \sin(2\pi fT) - 3]} , \quad (5)$$

6 Смотри Приложение А

которая является результатом дискретного преобразования Фурье АКФ (4).

График найденной спектральной плотности на одном периоде показан на рис. 7. Заметим, что для перевода в децибелы берется десять десятичных логарифмов, т. к. спектральная плотность мощности пропорциональна мощности и в квадрат ее возводить не требуется. Неравномерность спектра — 12 дБ. Подъем на +5 дБ говорит о доминировании в кодированном сигнале некой средней частоты, примерно равной 0,125. Ширина спектра по уровню -3 дБ составляет около 0,25. Таким образом, код MLT-3 приводит к перераспределению мощности из области высоких частот в область средних.

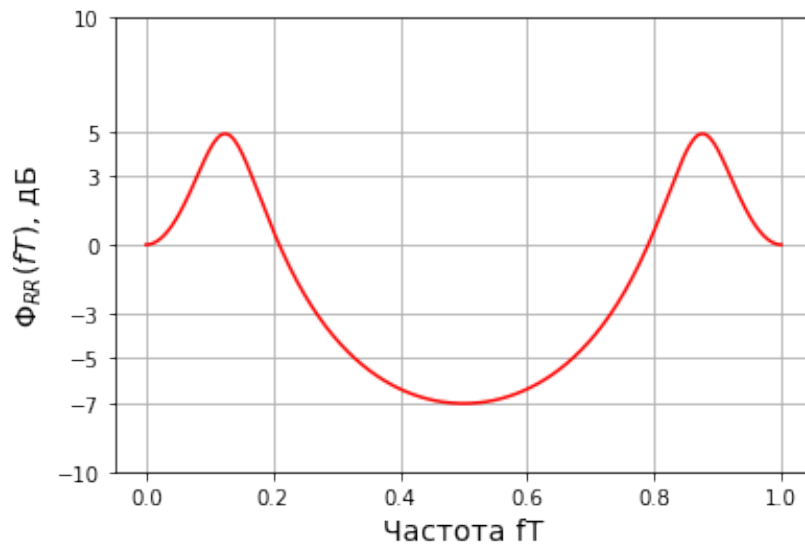


Рис. 7 Спектральная плотность кода MLT-3

Здесь частоте 0,5 или $1/2T$ соответствует половина частоты дискретизации, т. е. максимальная доступная для анализа частота (верхняя частота). Частоте же 1 или $1/T$, фактически, соответствует нулевая частота, потому что если из некоторого процесса делаются выборки с частотой $1/T$, а процессом является гармоническое колебание с той же частотой $1/T$, то амплитуда формируемых отсчетов будет постоянной, что равнозначно выборке из сигнала с нулевой частотой (эффект трансформации частот).

Найденное выражение (5) определяет своего рода корректор, форму, которая накладывается (в дБ суммируется, в разгах — перемножается) на спектр одиночного импульса $g(t)$, т. е. на передаточную функцию формирующего фильтра — фильтра, преобразующего дискретную последовательность R_n

в непрерывный сигнал $v(t)$, пригодный для передачи по некоторой линии связи.

Заключение

Вы только что погрузились в один из удивительных миров — мир творчества... Ведь, пусть и задним числом, но вместе с автором вы прошли путь от А до Я, начав, развив и закончив сложный процесс с положительным результатом. Вас можно поздравить с постижением процесса синтеза, пусть и на примере поиска выражения автокорреляционной функции и соответствующей спектральной плотности мощности нелинейного — заметьте, нелинейного! — кода MLT-3. Автор надеется, что теперь вам не составит особенного труда синтезировать автокорреляционные функции других используемых кодов.

Приложение А. Расчет спектральной плотности мощности кода MLT-3 по автокорреляционной функции

Используя определение спектральной плотности через дискретное преобразование Фурье АКФ, а также четность АКФ, получим

$$\Phi_{RR}(fT) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_{RR}(n) e^{-2\pi j n f T} = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} 2^{-n/2} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cos(2\pi n f T)$$

Используя равенства

$$A(n) = \Re\left(e^{j\frac{\pi n}{4}} e^{j2\pi n f T}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cos(2\pi n f T) - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \sin(2\pi n f T) ,$$

$$B(n) = \Re\left(e^{j\frac{\pi n}{4}} e^{-j2\pi n f T}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cos(2\pi n f T) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \sin(2\pi n f T) ,$$

$$\Phi_{RR}(fT) = 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{-n/2} [A(n) + B(n)] ,$$

найдем часть Фурье-суммы, связанную с $A(n)$

$$S(n, fT) = \Re\left[\sum_{n \geq 1} 2^{-n/2} e^{j\frac{\pi n}{4}} e^{j2\pi n f T}\right] = \Re\left[\sum_{n \geq 1} q^n\right] ,$$

$$q = 2^{-1/2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j2\pi f T} .$$

Так как $|q| < 1$, то в последнем равенстве стоит сумма сходящейся геометрической прогрессии, поэтому

$$S(n, fT) = \Re\left[\frac{q}{1-q}\right] = \frac{\sqrt{2} \cos(2\pi f T + \pi/4) - 1}{2 - 2\sqrt{2} \cos(2\pi f T + \pi/4) + 1} .$$

Сумма, связанная с $B(n)$, находится как $S(n, -fT)$, откуда

$$\Phi_{RR}(fT) = 1 + S(n, fT) + S(n, -fT) .$$