Пропускная способность канала передачи информации

Оглавление

10.11.2021, 16 с.

Предисловие

Данное пособие является достаточно интегральным (и завершающим), и поэтому рекомендуется к прочтению последним, то есть после изучения азбуки модуляции и помехоустойчивого кодирования, codesandsignals.tech.

Здесь поднимаются вопросы пропускной способности базовых каналов связи, и это сопряжено с определенными трудностями понимания ввиду отличия величины пропускной способности от обычной (технической) скорости передачи информации.

Делается попытка приблизить читателя к пределу Шеннона – таинственной величине, определенной «в целом» и основанной на понятии вероятности, которое также является интегральным, хотя и более доступно для понимания.

К пособию прилагаются файлы Mathcad с готовыми формулами. В связи с этим как дополнение рекомендуется изучить публикацию

«Вблизи границы Шеннона», Варгаузин В.,

журнал «Телемультимедиа», июнь, 2005,

оказавшую существенную помощь при составлении данного пособия, равно как и знаменитая книга Роберта Фано «Передача информации. Статистическая теория связи».

Пропускная способность и вероятность ошибки

Существует такое понятие как пропускная способность канала. Под каналом понимается некий черный ящик, входом и выходом которого являются множества символов – алфавиты. Каналы бывают дискретными и непрерывными. **Дискретный** канал наиболее понятен – в этом случае входные и выходные множества конечны, то есть имеют определенную мощность (размер). Например, входной и выходной алфавит может состоять из двух символов – в этом случае передается и принимается двоичный символ (бит). **Непрерывный** канал подразумевает бесконечное (и несчетное) множество входных и выходных символов. Например, множеством может являться множество вещественных чисел. Распространены и гибридные каналы: вход может быть дискретным, выход – непрерывным, и наоборот.

Понятие канала придумано для возможности абстрактного оперирования сущностью, предназначенной для передачи информации. Под абстрактностью подразумевается отсутствие привязки к конкретной аппаратной реализации (к внутреннему устройству черного ящика). Канал – понятие растяжимое: для одной и той же системы передачи информации можно сформировать несколько каналов, вложенных друг в друга по принципу матрешки. В зависимости от поставленной задачи можно выбирать разный уровень абстракции – от чисто дискретных (оперируя символами) до чисто непрерывных каналов (оперируя сигналами и шумами).

Естественно полагать, что основным свойством канала будет склонность к искажениям (помехам, ошибкам); в случае полного отсутствия искажений понятие канала теряет смысл. Для дискретного канала применимо понятие ошибки, для непрерывного – понятие искажения (помехи); ошибка – следствие искажения (помехи); не всякое искажение ведет к ошибке.

Для борьбы с ошибками (помехами) придумали корректирующие (помехоустойчивые) коды, при использовании которых во входной (информационный) поток по заранее определенным правилам вставляются избыточные символы. Отношение числа информационных символов k к общему числу символов n называют **скоростью кодирования,** $R = k/n$. Если $R = 1$, то кодирование отсутствует; чем меньше R, тем, в целом, мощнее код, но ниже скорость передачи информации (исходной – той, которая до кодирования). Именно по этой причине в беспроводных сетях при снижении уровня сигнала начинает падать скорость – это результат переключения на код с другим R, результат адаптации, направленной на поддержание стабильного качества канала, определяемого вероятностью ошибки.

Пропускная способность канала – предельная максимальная скорость передачи информации $C = \max I$, полностью определяемая структурой канала. Под скоростью здесь понимается не техническая скорость, определяемая частотой следования входных символов и поэтому не зависящая от канала, а средняя величина снятия неопределенности при наблюдении выхода. Оказывается, что эта довольно-таки абстрактная величина соотносима с такой вполне ощутимой величиной как скорость кодирования R: именно от их отношения зависит минимально достижимая вероятность символьной ошибки, причем достижимая как теоретически, так и практически (у теоретической величины C есть практическая поправка $E > 0$, $C_{\text{практика}} = C_{\text{теория}} - E$).

Структура канала определяется **вероятностным графом** с n входами и m выходами. Переход от i-го входа к j-му выходу характеризуется вероятностью перехода $p(y_j/x_i)$, а сам канал – матрицей переходных вероятностей $\mathcal{P}$. Здесь $X = \{x_i\}$ – входной символ (определяется источником символов), $Y = \{y_j\}$ – выходной символ (определяется как результат прохождения символов источника через канал). Источник задается своим вероятностным распределением $p(x_i)$. Символ Y при необходимости можно трактовать как новый источник (принцип матрешки или вложенности). Вероятностное распределение символа Y полностью определяется вероятностным распределением источника X и матрицей переходных вероятностей канала $\mathcal{P}$.

Канал называется **стационарным,** если матрица канала $\mathcal{P}$ не зависит от времени. Это чисто теоретическое определение; на практике же возникает противоречие между предельностью такого понятия как вероятность и зависимостью от времени, потому что для оценки вероятности требуется бесконечно большой интервал времени (на практике доступны лишь частоты). Несмотря на это, такое разделение оправдано и может принести практическую пользу (для существенно нестационарных каналов частоты время от времени должны обновляться). Польза оценивается величиной выигрыша (как правило, в децибелах). В современных системах даже единицы децибел имеют значимость ввиду большого количества обслуживаемых абонентов (пользователей системы). Адаптация беспроводных сетей к уровню сигнала – пример учета нестационарности радиоканала (лучше снизить скорость, чем получить обрыв связи – полная аналогия с автомобилями при возникновении, например, снегопада).

Вероятностью символьной ошибки называется вероятность ошибочного приема

$$p_{\text{ош}} = \sum_{i} p(x_i) \sum_{j \neq i} p(y_j / x_i).$$

Здесь первая сумма означает перебор по всем возможным входным символам, а вторая – перебор по ошибочным (т. е. $j \neq i$) символам на выходе канала. Таким образом перебираются все возможные варианты ошибочных переходов. Для стационарного канала вероятность ошибки – постоянная величина, характеризующая качество канала в целом (т. е. интегрально, что подтверждается знаком суммы в формуле). Например, величина 10^{-3} означает в среднем одну ошибку на 1000 принятых символов. Переходные вероятности определяются законом модуляции (набором сигналов) и типом аналогового канала (в т. ч. и существующей в нем помехи/шума). В общем случае эти вероятности разные, потому что сигналы в наборе сигналов удалены друг от друга на разное расстояние. Под аналоговым каналом понимается непрерывный канал с некоторой полосой частот и уровнем шума.

Часто поток символов отображают в битовый поток (непосредственно данные – информацию), используя некоторую карту соответствия (map) $s_i \leftrightarrow b_i$. Поэтому в конечном счете больше интересует **вероятность ошибки на один бит**, Bit Error Rate (BER), которая в целом зависит от вероятности символьной ошибки и карты соответствия, хотя точное выражение определяется графом канала и картой (никаких знаний кроме теории вероятностей для этого не требуется – работает элементарная логика).

Дискретный двоичный канал

Рассмотрим пример дискретного двоичного канала. Такой канал предназначен для передачи двоичного символа – бита. Правильным приемом здесь будут переходы типа $0 \to 0$ и $1 \to 1$, а ошибочным – переходы типа $0 \to 1$ и $1 \to 0$. Вероятности ошибочных переходов определяют вероятность ошибочного приема – **вероятность символьной ошибки** на выходе канала

$$p_{\text{ош}} = p(0)p(1/0) + p(1)p(0/1).$$

Матрица переходных вероятностей для данного канала имеет вид

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p(0/0) & p(1/0) \\ p(0/1) & p(1/1) \end{pmatrix}.$$

В этом случае вероятностное распределение символа Y будет определяться как произведение вектора-строки на матрицу

$$P(Y) = P(X)\mathcal{P}.$$

Сумма элементов для любой i-й строки матрицы равна единице

$$\sum_Y P(Y/x_i) = 1.$$

Канал называется **симметричным по входу,** если строки матрицы переходных вероятностей образованы некоторыми перестановками единственной строки (строки одинаковы с точностью до перестановки). В этом случае входные символы искажаются каналом одинаково. Мерой искажения символа является величина неопределенности (условной энтропии)

$$H(Y/x_i) = \sum_{Y} P(Y/x_i)\log_2 \frac{1}{P(Y/x_i)},$$

которую называют **потерями в канале**. Для симметричного по входу канала величина потерь не зависит от входного символа, поэтому средние потери определяются одним слагаемым

$$H(Y/X) = H(Y/x_i).$$

Канал называется **симметричным по выходу,** если перестановочное свойство соблюдается для столбцов матрицы $\mathcal{P}$. В этом случае равномерное распределение входных символов $P(X) = 1/n$ приводит к равномерному распределению выходных

$$P(y_j) = \sum_{X} P(X)P(y_j/X) = \frac{1}{n}\sum_{X} P(y_j/X) = \frac{1}{m}.$$

Здесь j-е столбцовые суммы одинаковы.

Канал, обладающий симметрией как по входу, так и по выходу, называют **симметричным каналом.** Достоинством такого канала является простота расчета пропускной способности.

Скорость передачи информации определяется разностью энтропий

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X),$$

Пропускная способность канала – это наибольшая возможная скорость передачи информации

$$C = \max I(X,Y),$$

причем максимизация идет по входному вероятностному распределению $P(X)$. Для наглядности канал можно представить как систему с многими входами и выходами, где каждый вход имеет свой выход и меру качества, определяющую степень его влияния на чужие выходы. В общем случае входы имеют разное качество, поэтому более качественные должны использоваться чаще – в этом случае потенциал канала будет задействован наилучшим образом – мера неопределенности после приема, в среднем, будет наименьшей. Частота использования входов определяется вероятностным распределением $P(X)$, что и раскрывает смысл выражения для пропускной способности.

Смысл условной энтропии (величины потерь в канале) определяется тем, что это средняя мера неопределенности сообщения на выходе канала, которая остается при точном знании входа. В идеале точное знание входа дает точное знание выхода, и в этом случае потери равны нулю (канал без помех).

Известно, что

$$H(Y) \leq \log_2 m,$$

причем равенство достигается для равномерного распределения. Тогда для симметричного по входу канала максимум $I(X,Y)$ определяется максимумом $H(Y)$, потому что $H(Y/x_i)$ не зависит от $P(X)$, и тогда

$$C \leq \log_2 m - H(Y/x_i).$$

Для симметричного канала равномерный выход является следствием равномерного входа, поэтому пропускная способность реализуется при равномерном входе, и неравенство переходит в равенство

$$C = \log_2 m - H(Y/x_i).$$

Продолжим рассматривать дискретный двоичный канал. Сделаем его симметричным – **двоичный симметричный канал** (ДСК)

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Величина p – это вероятность битовой ошибки в канале. Пропускная способность такого канала равна

$$C = 1 + p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)\,, \frac{\text{бит}}{\text{символ}}.$$

Для нулевой и единичной вероятности ошибки пропускная способность равна единице. При $p = 1$ битовый поток можно инвертировать и полностью восстановить исходный, то есть существует функциональное преобразование, полностью восстанавливающее исходный поток. При $p = 1/2$ пропускная способность равна нулю – в этом случае ошибки неисправимы, и никакое преобразование не поможет (таким преобразованием и являются корректирующие коды). При $p \neq 1/2$ существует преобразование (пусть и очень сложное), полностью исправляющее ошибки двоичного симметричного канала. Клодом Шенноном показано, что для этого требуется корректирующий код со скоростью кодирования $R < C$. При небольшом отличии p от $1/2$ пропускная способность, очевидно, мала, поэтому требуется довольно-таки мощный код, который, к тому же, надо оптимально декодировать. В практических ситуациях R меньше C с некоторым запасом, плюс выбранные кодер и декодер обеспечивают хоть и малую, но всегда ненулевую вероятность ошибки (которую еще надо уметь оценить, то есть измерить, потому что дело доходит до областей $10^{-12} \dots 10^{-15}$).

Попытаемся заглянуть глубже в проблему исправимости ошибок…

Почему надо сравнивать скорость кодирования кода и пропускную способность канала?

Вопрос сравнимости R и C заслуживает отдельного внимания, однако его детальный разбор обеспечивает глубокое понимание теории и техники передачи информации.

Для вскрытия «тайны» достаточно (я бы сказал «необходимо и достаточно») рассмотреть двоичный симметричный канал (ДСК) с независимыми ошибками, вероятность q-кратной ошибки на выходе которого определяется формулой Бернулли

$$P(q) = C_n^q p^q (1 - p)^{n-q},$$

где p – вероятность битовой ошибки, n – длина кодового вектора, которая определяется длиной корректирующего кода – здесь достаточно рассмотреть двоичные линейные блочные (n, k) коды –, а C_n^q – число сочетаний из n по q.

Скорость кодирования блочного кода

$$R = \frac{k}{n} = \frac{n - r}{n} = 1 - \frac{r}{n}.$$

Пропускная способность ДСК

$$C = 1 - \left[p \log_2 \frac{1}{p} + (1 - p) \log_2 \frac{1}{1 - p}\right] = 1 - H_2(p).$$

Видим, что в этих формулах после «единички» идет слагаемое, соответственно определяющее избыток кода и величину потерь в канале. Смысл этого в том, что потери должны компенсироваться избыточностью кода – числом проверочных символов r. Чем больше потери, тем большей должна быть избыточность кода[1].

Слагаемое $H_2(p)$ можно также характеризовать как энтропию (информационную производительность) «антиисточника» – источника ошибок, биты на выходе которого складываются (по модулю два) с битами основного (полезного) источника – канал, естественно, является аддитивным.

Линейные коды характеризуются тем, что множеству из 2^k векторов ошибок $\vec{e}$ ставится в соответствие вектор-синдром $\vec{c}$

$$\vec{c} \leftrightarrow \{\vec{e}\}.$$

Всего векторов-синдромов 2^r, поэтому на всех 2^n векторов ошибок их по определению не хватит, и значит все ошибки исправить принципиально нельзя (акт исправления – это когда по синдрому однозначно определяется вектор ошибки). Однако фокус заключается в том, что есть определенный пласт пренебрежимо редко возникающих ошибок, на которые нет смысла тратить ресурсы кода – синдромы (все синдромы – равноценны). Как правило, это векторы ошибок высокой кратности. Однако, высокая кратность эквивалентна низкой кратности (ошибку можно инвертировать; напомним, мы рассматриваем ДСК с фиксированной вероятностью ошибки), поэтому под высокой кратностью здесь понимается кратность близкая к половине длины кода (в окрестности половины длины). Синдромы выгодно тратить на

[1] Отметим, что высказывания этого параграфа тем точнее, чем больше длина кода n, т. е. их справедливость – асимптотическая

наиболее вероятные векторы ошибок, так, чтобы оставшаяся суммарная вероятность была бы минимальной – она и будет определять вероятность ошибки после декодирования.

Самый мощный код против неисправимого канала

Известно, что в ДСК средняя кратность ошибки равна

$$\bar{q} = np.$$

Эта величина почти совпадает с наиболее вероятной кратностью, поэтому не будет большой ошибкой использовать данное среднее значение. Вероятность ошибки такой кратности при большом np может быть оценена по формуле Стирлинга

$$P(q = np \gg 1) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}.$$

Интересен случай $p = 1/2$, когда канал «неисправим». В этом случае все ошибки равновероятные, но если их сгруппировать по кратности, то наиболее вероятными окажутся ошибки кратности $n/2$, возникающие с вероятностью

$$P\left(q = \frac{n}{2} \gg 1\right) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

Самые маловероятные ошибки (т. е. кратности 1 или $n-1$) возникают с пренебрежимо малой вероятностью

$$P(q = 1) = \frac{n}{2^n}.$$

Постараемся исправить все (при большом n) ошибки, используя **самый мощный линейный блочный код** – код с числом проверочных символов $r = n-1$. Кодовыми векторами такого кода будут «все нули» и «все единицы». Количество синдромов такого кода $2^r = 2^n/2$, т. е. гарантированно исправить можно только половину всех 2^n ошибок. Данный код устроен так, что одному синдрому соответствует ровно два вектора ошибок – прямой (кратностью q) и инверсный (кратностью $n-q$). Зарезервируем под синдромы ошибки кратности $q < n/2$ (декодирование по минимуму расстояния). Тогда получается в половине случаев ошибка не будет исправлена, поэтому вероятность битовой ошибки после декодирования, BER, равна ½. Получается, что вероятность битовой ошибки после исправления равна вероятности ошибки до исправления, следовательно самый мощный код с поставленной задачей не справился – канал неисправим.

Двоичный канал с мягкими решениями

Данный канал является гибридным: вход у него дискретный, а выход – непрерывный («мягкий»). Такой канал используется при мягком декодировании корректирующих кодов (в частности, LDPC коды, полярные коды), что обеспечивает выигрыш по сравнению с жестким декодированием, потому что мягкий выход более информативен по сравнению с жестким. Для подтверждения сказанного выведем формулу для пропускной способности такого канала и сравним ее с пропускной способностью ДСК (см. выше).

Математической моделью двоичного канала с мягкими решениями является набор из двух сигналов, аддитивная помеха в виде белого гауссовского шума и оптимальный приемник (коррелятор или согласованный фильтр)

$$v(t) = s_i(t) + n(t),$$

$$v = \int_0^T v(t)w(t)dt,$$

$$w(t) = s_1(t) - s_0(t).$$

Здесь $w(t)$ – опорный (разностный) сигнал, равный разности двух образцовых (эталонных), определяемых законом модуляции. Белый гауссовский шум является худшей помехой, т. е. максимально снижает информативность принимаемого сигнала, а оптимальный приемник – лучшим приемником (в плане минимизации вероятности ошибки), поэтому такой выбор вполне адекватен. Число v и является мягким выходом канала, а индекс $i = \{0, 1\}$ – дискретным входом. Для преобразования мягкого канала в жесткий необходимо по числу v принять решение: это бит 0 или 1.

Величина v является гауссовской случайной величиной, со средним значением v_i, зависящим от переданного бита, и дисперсией, зависящей от уровня «аналогового» шума (от его **спектральной плотности мощности,** СПМ, N_0). Для удобства обозначим эти средние уровни как ± 1, тогда дисперсия (уровень «числового» шума, т. е. на выходе коррелятора) будет численно равна СПМ

$$\sigma^2 = \frac{E_w N_0}{2} = N_0,$$

потому что энергия разностного сигнала, совпадающая с разностью уровней, равна

$$E_w \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \big(s_1(t) - s_0(t)\big)^2 dt = v_1 - v_0 = 2.$$

Качество приема (и пропускная способность) определяется соотношением расстояния $v_1 - v_0$ и среднеквадратическим уровнем шума σ (**отношение сигнал-шум, ОСШ, после обработки или «ОСШ по разностному сигналу»**).

Скорость передачи информации (по Шеннону) определяется средней взаимной информацией $I(X;\, Y)$ между входом X и выходом Y канала. В рассматриваемом случае вход может принимать два значения, поэтому в формулу пропускной способности канала войдет два слагаемых

$$\log \frac{p(0/v)}{p(0)},$$

$$\log \frac{p(1/v)}{p(1)}.$$

Здесь вероятность в знаменателе – это доопытная вероятность (*a priori*), а в числителе – послеопытная вероятность (*a posteriori*), при этом опыт заключается в том, что принято конкретное число v. Эти два слагаемых определяют взаимные информации $I(x_i;\, y_j)$, только величина Y может принимать континуум значений (канал мягкий), поэтому индекс j фактически здесь не требуется. Если вероятность после опыта больше доопытной вероятности, то величина взаимной информации больше нуля, и считается, что мы получили некоторый объем информации – дельту, равную разности логарифмов. В идеале послеопытная вероятность должна быть равна единице – в этом случае пропускная способность наибольшая (в данном случае 1 бит на символ). Это возможно, если СПМ шума равна нулю (или разность сигнальных уровней равна бесконечности).

Для вычисления средней взаимной информации два выше определенных слагаемых следует усреднить

$$I(X;Y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(0)w(v/0)\log\frac{p(0/v)}{p(0)}dv + \cdots.$$

Здесь $w(v/0)$ – плотность распределения гауссовской случайной величины при условии, что был передан бит 0. Усреднение заключается в интегрировании – в суммировании взаимной информации $I(x_i;\ y_j)$ с весовыми коэффициентами, равными вероятности события $(x_i = 0;\ y_j = v)$, которая определяется как произведение вероятностей $p(0)$ и $w(v/0)dv$. Слагаемое для бита 1 аналогичное, и для удобства не показано.

Рассматриваемый канал является симметричным (обратитесь к предыдущим параграфам и подумайте почему; для удобства анализа выход канала рекомендуется проквантовать), поэтому максимум скорости передачи информации будет при равновероятном входе, и поэтому пропускная способность будет равна

$$\mathrm{C} = -\int_{-\infty}^{\infty} w(v/0)\log\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{w(v/1)}{w(v/0)}\right)\right)dv.$$

Для получения данного выражения следует, однако, знать и уметь применять базовые формулы теории вероятностей

$$p(v)p(0/v) = p(0)p(v/0),$$

$$p(v) = p(0)p(v/0) + p(1)p(v/1),$$

а также понимать предельный переход

$$\frac{p(v/1)}{p(v/0)} = \frac{w(v/1)}{w(v/0)}.$$

Раскрывая логарифм, можно получить более удобное выражение

$$\text{C} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} w(v/0) \log\left(1 + \frac{w(v/1)}{w(v/0)}\right) dv.$$

Подставляя гауссовские плотности, получим следующее выражение

$$C = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v+1)^2}{2N_0}} \log\left(1 + e^{\frac{(v+1)^2-(v-1)^2}{2N_0}}\right) dv.$$

Для удобства введем ОСШ после обработки

$$q^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(v_1 - v_0)^2}{\sigma^2} = \frac{4}{N_0},$$

и выразим пропускную способность через данное ОСШ

$$C = 1 - \frac{q}{\sqrt{8\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v+1)^2 q^2}{8}} \log\left(1 + e^{\frac{vq^2}{2}}\right) dv.$$

Теперь сделаем замену $(v+1)q = z,\, q \cdot dv = dz$

$$C(q) = 1 - \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{8}} \log_2\left(1 + e^{\frac{q(z-q)}{2}}\right) dz.$$

Здесь мы у логарифма приписали основание 2 для выражения пропускной способности в битах на символ, бит/символ.

Подынтегральное выражение устроено так, что его максимум приходится на $z \approx q$, поэтому при численном расчете пропускной способности пределы интегрирования разумнее отцентрировать относительно текущего q.

Чтобы сравнить пропускные способности ДСК и канала с мягкими решениями, требуется вместо вероятности ошибки p подставить формулу, в которую входит введенное (можно сказать универсальное) ОСШ q

$$p = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{q}{2\sqrt{2}}\right).$$

Здесь $\operatorname{erfc}(z)$ – дополнительная функция ошибок. Также принято приводить ОСШ к отношению сигнал-шум на один бит E_b/N_0

$$q^2 = \frac{E_b}{N_0} 2R \log_2 M,$$

где R – скорость кодирования (кодирование уменьшает ОСШ, так как та же средняя мощность формирователя тратится на большее число символов), M – число символов модуляции (например, при 8 символах один символ модуляции переносит три кодовых бита, то есть затрачивается в среднем в три раза больше энергии, чем при передаче одного бита при фиксированной средней мощности).

Гауссовский канал

Здесь мы сделаем некоторые наметки, чтобы читатель в итоге самостоятельно получил известную формулу Шеннона о пропускной способности аналогового канала как функцию отношения сигнал-шум и полосы пропускания. Здесь необходимо записать/упростить/вычислить двойной интеграл по сравнению с одинарным в случае канала с мягкими решениями, при этом двойной должен вычислиться аналитически.

Данный канал является обобщением двух рассмотренных: ДСК и канала с мягкими решениями. Отличие гауссовского канала от последнего в том, что данный канал полностью аналоговый: в нем и сигнал, и шум непрерывны (принимают континуум значений). Если в ДСК или канале с мягкими решениями максимум скорости наблюдается при равновероятных входных битах, то в гауссовском канале максимум будет при гауссовском входном сигнале, то есть для расчета пропускной способности требуется задать гауссовскую плотность вероятностей сигнала. При этом средние значения и сигнала, и шума для простоты рекомендуется взять нулевыми. На выходе канала имеем, естественно, аддитивную смесь сигнала с шумом, при этом эта смесь характеризуется ОСШ, равным отношением дисперсий этих случайных величин

$$q_{in}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} = \frac{\sigma_{\text{c}}^2}{\sigma_{\text{ш}}^2}.$$

Здесь ОСШ по входу, так как нет никаких разностных сигналов: информация – информационные биты – волшебным образом вшиты в аналоговый сигнал (причем гауссовский). В этом и есть идеальность данного канала по отношению к входному сигналу: не требуется ни кодирования, ни модуляции (точнее они совмещены в одно идеальное целое…). Канал с мягкими решениями менее идеален в том плане, что требует кодирования и модуляции, но при демодуляции и декодировании информации больше, чем в случае канала с жесткими решениями (то есть в случае ДСК). Именно поэтому формулу Шеннона для аналогового канала считают идеальной, причем во всех смыслах этого слова, и именно поэтому ее трудно осознать на начальном этапе изучения – это во истину сферический конь в вакууме!..